# A topologikus húrelmélet néhány vonatkozása

*Tézisfüzet*


Kökényesi Zoltán

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Fizika Doktori Iskola, Részecskefizika Program


| | |
|---|---|
| Témavezető: | Dr. Sinkovics Annamária, tudományos főmunkatárs |
| Segédtémavezető: | Dr. Richard Szabo, egyetemi tanár |
| Doktori iskola vezetője: | Dr. Tél Tamás, egyetemi tanár |
| Doktori program vezetője: | Dr. Katz Sándor, egyetemi tanár |

Doktori értekezés

fizika Phd fokozathoz

2018

# Bevezető

Húrelméleti mennyiségek számolása akár nagyon bonyolult is lehet, ugyanakkor léteznek jól használható geometriai módszerek, amelyek az eredeti konstrukció megszorításán keresztül a húrelmélet egy részszektoráról adnak információt. Az elmúlt néhány évtizedben a topologikus húrelmélet bizonyult nagyon hatékonynak, hogy a fizikai húrelmélet topologikus szektoráról információt szerezzünk, emellett segített néhány vonatkozó fundamentális kérdés mélyebb megértésében, úgymint a fekete lyuk entrópia és az effektív szuperpotenciálok.

A topologikus húrelmélet születésétől kezdve mind a fizikusok, mind a matematikusok által széles körben tanulmányozott terület volt, amely sok különböző alkalmazást inspirált. Az egyik ilyen lenyűgöző eredmény – amit az eredeti konstrukcióból nem is vártunk volna –, hogy az A-model topologikus húrelmélet Calabi–Yau-téren kompaktifikált négydimenziós BPS fekete lyukak mikroállapotait számlálja meg, így képes mikroszkopikus leírást adni a fekete lyukak egy osztályáról [4]. A topologikus húrelmélet oldaláról ez a dualitás képes lehet a topologikus húrelmélet nemperturbatív definícióját adni. Abban az esetben, amikor a Calabi–Yau-tér egy két rangú holomorf vektornyalábbal fibrált Riemann-felület, a BPS-állapotok számlálása egy $q$-deformált $U(N)$ Yang–Mills-elmélet partíciós függvényét definiálja a Riemann-felületen, amely nagy $N$ esetén egy egymáshoz csatolt királis és antikirális $q$-deformált $SU(N)$ Yang–Mills-elméletre faktorizálódik [5]. A kétdimenziós mértékelmélet húrelméleti duálisa a topologikus húrelmélet. Matematikai nézőpontból ez a dualitás azt állítja, hogy a Calabi–Yau-tér Gromov–Witten-invariánsai felületek elágazó fedéseinek Hurwitz-számaival számolhatók.

Munkám ennek a dualitásnak finomított verziójával foglalkozik, ahol az M-elméleti kompaktifikáció által motivált finomított topologikus húrok finomított fekete lyuk partíciós függvényekkel vannak kapcsolatban, melyek spinekkel együtt számlálnak BPS-állapotokat [6]. Az itt megjelenő finomított topologikus húrelmélettel duális kétdimenziós mértékelmélet az úgynevezett $(q,t)$-deformált vagy Macdonald-deformált Yang–Mills-elmélet, amelynek nagy $N$ kifejtését az [1] cikkemben tanulmányoztam.

A húrelméleti fluxusok a jelenleg ismert legígéretesebb jelöltek a kompaktifikációk modulus-stabilizációs problémájának megoldására. A T-dualitás, ami kiterjedt húrszerű objektumok sajátos szimmetriája, új típusú fluxusokhoz vezet, melyek szükségesek a modulus-stabilizációhoz. Továbbá a jelenlétük visszahat a kompaktifikált térre is, megváltoztatva a geometriai tulajdonságait úgy, hogy az általánosított geometria keretein belül leírható legyen. Ezen geometria a komplex és szimplektikus geometriát az általánosított komplex geometrián belül egyesíti. Az egyesítés abból indul ki, hogy az érintőnyalábot kibővíti a koérintőnyalábbal. A topologikus húrok négydimenziós effektív térelméletek szuperpotenciálját számolják IIA és IIB kompaktifikációkban fluxusok nélkül, de a megfelelő topologikus elmélet fluxus kompaktifikációk vonatkozásában egyelőre ismeretlen.

Az általánosított geometria algebrai tulajdonságai Courant-algebroidok által formalizálhatók, és a fluxusok úgy jelennek meg, mint ezek csavarásai [7]. Minden egyes Courant-algebroid kölcsönösen értelmű kapcsolatban van egy háromdimenziós topologikus Courant szigma-modellel, az AKSZ-formalizmus pedig természetes geometriai módszert ad a BV-kvantált elméletük konstrukciójához [8]. A topologikus A- és B-modellek a topologikus húrelmélethez tartozó szigma-modellek. Létezik különkülön AKSZ-formalizmusuk, de a kapcsolatuk az általánosított geometriához és a fluxusokhoz még nem teljesen tisztázott. A [2] cikkemben ezt az összefüggést tanulmányoztam.

A topologikus M-elméletet eredetileg az A- és B-modell egyesítésére vezették be abból a célból, hogy a fizikai M-elmélet egy topologikus szektorát írja le. Az elmélet hétdimenziós $G_2$-holonómiájú sokaságokon konstruálható, ahol $\mathcal{N} = 1$ redukált szuperszimmetriája van. Konstrukciója $G_2$-sokaságok Hitchin-típusú forma-elméletén alapul, és a dimenziós redukciója egy körön a topologikus A- és B-modell formaelméleteit adja.

Az A- és B-modellnek is van világfelületi formalizmusa húrelméletként, amely kétdimenziós topologikus szigma-modellel adható meg. Ezért természetes azt várnunk, hogy a topologikus M-elméletnek is van világtérfogati formalizmusa, ahol a fundamentális objektumok topologikus membránok. Két különböző membránt vezettek be ebből a célból: az egyiknél Mathai–Quillen-formalizmust használtak [10], míg a másik [11] a $G_2$-struktúrához tartozó harmonikus három-forma visszahúzottja által adott topologikus hatás BRST mérték rögzítéséből származtatható. Mindkét topologikus membránt arra szánták, hogy ugyanannak az elméletnek fundamentális objektumai legyenek, ami óhatatlanul felveti a kérdést, hogy vajon leírhatóak-e egyetlen elméleten belül. A [3] cikkemben ezen membránok AKSZ-formalizmusának egyesítését tanulmányoztam.

# Tézispontok

Disszertációm az alábbi három cikk eredményeire épül: [1–3].

### A Macdonald-deformált kétdimenziós Yang–Mills-elmélet királis kifejtése

Az [1] cikkünkben a [12] cikk nagy $N$ kifejtését terjesztettük ki finomított esetre. Kiszámoltuk zárt felületek partíciós függvényének, illetve peremes defektek és Wilson hurkok nagy $N$ kifejtését. Konstrukciónk matematikai szempontból azon a jelenségen alapul, hogy a finomítás intertwiner operátorok karaktereinek Etingof–Kirillov-elméletét használja, melyet általánosított karaktereknek hívnak, és a Jack- és Macdonald-polinomokhoz úgy kapcsolódnak, mint ahogy a közönséges karakterek a Schur-polinomokhoz. Felhasználva, hogy a Macdonald-polinomok felírhatók a hozzájuk tartozó kvantumcsoportok vektor-értékű karaktereiként, alkalmaztuk a kvantum Schur–Weyl-dualitást a $q$-deformált esethez hasonlóan. Ezáltal egy általánosabb és összetettebb kifejtést kaptunk Hecke-algebrán értelmezett delta-függvények összegeként. Miközben munkánk során a [12] cikk sok eredményét használtuk, ezeket különböző irányokban bővítettük ki. Bizonyos centrális elemek definícióját tisztáztuk, egy új Fourier-típusú transzformációt vezettünk be, amely a kvantum csoport karaktereit leképezi a Hecke-algebra karaktereibe, és bebizonyítottunk egy összefüggést nagy $N$ esetén a finomított és közönséges Littlewood–Richardson-együtthatók között.

Sem a $q$-deformált és sem a finomított kifejtésnek nem létezik egyértelmű világfelületi értelmezése, ahogy a finomított topologikus húrelméletnek sincs. Konstrukciónknak a korábbiaktól függetlenül is lehet matematikai relevanciája annak fényében, hogy a nem deformált királis elmélet az elágazó fedések klasszikus Hurwitz-tereinek világfelületi térelmélete. Hogy ezt a nézőpontot jobban megvizsgáljuk, tanulmányoztuk a $(q,t)$-deformált elmélet egy speciális klasszikus limeszét, amelyben $t = q^\beta$ és $q \to 1$, ahol $\beta$ rögzített. Ebben a limeszben a Macdonald-polinom Jack-függvényre, míg a Hecke-algebra közönséges szimmetrikus csoport-algebrára egyszerűsödik, és a $(q,t)$-deformált partíciós függvény újfajta deformációját adja a Riemann-felületek elágazó fedéseit leíró szokásos Hurwitz-elméletnek. Tudomásunk szerint ez a deformáció korábban ismeretlen volt az irodalomban. A partíciós függvény ezen speciális limeszét generátorfüggvényként értelmeztük parametrizált Euler-karakterek számára, amely $\beta = 1$ limeszben visszaadja a szokásos orbifold Euler-karakterek Hurwitz-terét.

**Kettőzött térelmélet az A/B-modell számára és topologikus S-dualitás általánosított geometriából**

A [2] cikkünkben az A- és B-modell AKSZ-konstrukcióját közös membrán szigma-modellként fogalmaztuk újra kettőzött térelmélet keretein belül. Természetes magyarázatot adtunk arra, hogy az AKSZ-konstrukcióik hogyan kapcsolódnak az általánosított komplex struktúrához. Ez a megközelítés rámutat néhány új jelenségre: a topologikus S-dualitás például megjelenik az AKSZ szigma-modellek szintjén és származtatható általánosított komplex geometriából.

Abból az észrevételünkből kiindulva, hogy a kettőzött téren definiált Poisson szigma-modell mind az A-, mind a B-modellt leírja a kettőzött Poisson-struktúra különböző választásával, bevezettünk egy nyílt AKSZ membrán szigma-modellt, amely egy konkrét mértékben a kettőzött Poisson szigma-modellt adja vissza a peremen. Az ezután alkalmazott redukciónk elfelezte az egy szellemszámú szupertereket. Az így kapott AKSZ membrán szigma-modell mozgásegyenlete a kezdeti Poisson-struktúra és komplex struktúra által meghatározott általánosított komplex struktúra azonosságainak felel meg. Ez a konstrukció olyan Courant-algebroidot ad, melynek azonosságai az általánosított komplex struktúra integrálhatósági feltételével ekvivalensek. Tudtunkkal ez új példa Courant-algebroidra. Megmutattuk továbbá, hogy mértékrögzítéssel az AKSZ membrán-elmélet a peremen A- vagy B-modellre redukálható, amennyiben az általánosított komplex struktúra tisztán Poisson- vagy tisztán komplex struktúra.

Ezenkívül – az AKSZ konstrukció szintjén – megvalósulási módját találtuk a topologikus S-dualitásnak, amely a topologikus húrelmélet A- és B-modelljének gyengén és erősen csatolt szektorát cseréli ki. Eredményeink olyan általunk bevezetett S-dualitáson alapulnak, amely az általánosított komplex struktúrához tartozó Courant-algebroid szintjén a Poisson- és a komplex struktúra Courant-algebroidjait képezi egymásba. Ezt a dualitást az AKSZ membrán szigma-modell szintjére emeltük fel, és olyan S-dualitásként értelmeztük, amely az A- és B-modell $g_{\mathrm{A}}$ és $g_{\mathrm{B}}$ csatolásait a szokásos $g_{\mathrm{A}} = 1/g_{\mathrm{B}}$ összefüggéssel hozza kapcsolatba.

Fő eredményeink mellett néhány új módszert és technikát is kidolgoztunk, amiket a munkánk során többször is használtunk. Mértékrögzítési módszert vezettünk be peremes dimenziós redukciókhoz, és megmutattuk, hogy ebben a mértékben a kontravariáns Courant szigma-modell a Poisson szigma-modellt adja, továbbá a csavarását összefüggésbe hoztuk a nemasszociatív $R$-fluxus háttérrel. Megmutattuk azt is, hogy a $H$-fluxussal csavart standard Courant szigma-modell egy konkrét mértékben a B-modellt adja.

### AKSZ-konstrukció $G_2$-sokaságon definiált toplogikus membránokhoz

A topologikus M-elmélet vonatkozásában megjelenő topologikus membránokkal kapcsolatos eredményeinket a [3] cikkben publikáltuk. AKSZ-formalizmus segítségével olyan BV-kvantált topologikus membránokat konstruáltunk $G_2$-sokaságon, amelyek egyesítik a [10] és [11] cikkekben tárgyalt membránokat abban az értelemben, hogy különböző mértékben visszaadják őket. Emellett olyan topologikus hárombrán-modellt vezettünk be AKSZ-konstrukció segítségével, amely világfelületi dimenziós redukció során az AKSZ membrán-elméleteinket adja. A hárombrán-modell származtatott zárójele egyrészt megegyezik az M-elmélet általánosított geometriájában megjelenő standard 2-Courant-zárójellel, másrészt pedig a topologikus membránok $G_2$-sokaságán definiált $T \oplus \bigwedge^2 T^*$ általánosított érintőterén indukált anomáliamentes áramalgebrájával. Azt találtuk továbbá, hogy a $G$-fluxussal csavart hárombrán-modellünk kör mentén végzett kettős dimenziós redukciója a csavart standard Courant szigma-modellt adja, amely a II-es típusú húrelmélet $H$-fluxusának geometriai leírásával van kapcsolatban. Emellett elvégeztük az AKSZ membrán modelljeink dimenziós redukcióját is, amely mértékrögzítés és kanonikus transzformáció után az A-modell új AKSZ-konstrukcióihoz vezetett. Az egyik AKSZ húr szigma-modell további dimenziós redukciójából új AKSZ-konstrukciót kaptunk a szuperszimmetrikus kvantummechanikához. Fő eredményeink mellett – mivel nem találtuk meg ilyen formában az irodalomban – összefoglaltuk a szupertér formalizmusban tárgyalt BV-kvantált elméletek mértékrögzítését és a szuperfunkcionálok differenciálkalkulusát.

# Irodalomjegyzék


[1] Z. Kökényesi, A. Sinkovics and R. J. Szabo, *Fortsch. Phys.* **64** (2016) 11-12, 823, [arXiv:1605.03748 [hep-th]].

[2] Z. Kökényesi, A. Sinkovics and R. J. Szabo, *Fortsch. Phys. in press,* [arXiv: 1805.11485 [hep-th]].

[3] Z. Kökényesi, A. Sinkovics and R. J. Szabo, *Fortsch. Phys.* **66**, 3, (2018) 1800018, [arXiv:1802.04581 [hep-th]].

[4] H. Ooguri, A. Strominger, and C. Vafa, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 106007, [arXiv:hep-th/0405146].

[5] M. Aganagic, H. Ooguri, N. Saulina and C. Vafa, *Nucl. Phys. B* **715** (2005) 304, [arXiv:hep-th/0411280].

[6] M. Aganagic and K. Schaeffer, *JHEP* **1301** (2013) 060, [arXiv:1210.1865 [hep-th]].

[7] R. Blumenhagen, A. Deser, E. Plauschinn and F. Rennecke, *Fortsch. Phys.* **60** (2012) 1217, [arXiv:1205.1522 [hep-th]].

[8] D. Roytenberg, *Lett. Math. Phys.* **79** (2007) 143, [arXiv:hep-th/0608150].

[9] R. Dijkgraaf, S. Gukov, A. Nietzke and C. Vafa, *Adv. Theor. Math. Phys.* **9** (2005) 603, [arXiv:hep-th/0411073].

[10] L. Anguelova, P. de Medeiros and A. Sinkovics, *Adv. Theor. Math. Phys.* **10** (2006) 713 [arXiv:hep-th/0507089].

[11] G. Bonelli, A. Tanzini and M. Zabzine, *Adv. Theor. Math. Phys.* **10** (2006) 239 [arXiv:hep-th/0509175].

[12] S. de Haro, S. Ramgoolam and A. Torrielli, *Commun. Math. Phys.* **273** (2007) 317 [arXiv:hep-th/0603056].

2018